3 | 14 2 $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{3}$ $+\frac{}{6}n \dots$

1-12-14

▶ Έστω $x_0, x_1, x_2, \dots x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ των και $f \in C^n[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a', b')$ όπου $a' = \min(x_0, x_1, \dots x_n)$, $b' = \max(x_0, x_1, \dots x_n)$ τέτοια ώστε $\Delta^n(x_0, x_1, \dots x_n)(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

Έστω $P(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ το πολ. παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$. Από την έκφραση του σφάλματος κατά την παρεμβολή, έχουμε $f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$. Θεωρούμε και το τυχαίο σημείο $x \in [a,b]$ και παίρνουμε το πολυώνυμο $P(x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}; x)$

Από την έκφραση πολ. παρεμ. του Νεύτωνα, έχουμε:

$$f(x) = P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x; x) = P(x) + \Delta^n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x) \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$$

Εξισώνοντας τους τελευταίους όρους των δύο σχέσεων, έχουμε: $\Delta^n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x)(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Θέτοντας όπου x το x_n, θα υπάρχει $\xi \in (a', b')$ τέτοιο ώστε $\Delta^n(x_0, x_1, \dots x_n)(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

$\boxed{n=1}$: $\Delta^1(x_0, x_1)(f) = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$.

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Έστω $f \in C[a,b]$, φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Το πρόβλημα είναι η εύρεση του $I(f)=\int_a^b f(x)dx$.

Εάν είναι γνωστή η παράγουσα συνάρτηση F, τότε $I(f)=F(b)-F(a)$

Σε λίγες περιπτώσεις γνωρίζουμε την F και σε πολλές από αυτές είναι πολύπλοκη, που ο υπολογισμός του $I(f)$ θα 'χει προβλήματα ευστάθειας.

Στην αριθμητική ολοκλήρωση, θεωρούμε τα σημεία $x_0, x_1, \dots x_n \in [a,b]$ και προσεγγίζουμε την τιμή του $I(f)$ με την ποσότητα $Q_{n+1}(f)$.

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n).$$

Κλειστοί τύποι Αριθμ. Ολοκλήρωσης των Newton-Cotes.

Θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$, με $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\dots n$. Τότε το $I(f)$ το προσεγγίζουμε με το $Q_{n+1}(f)=I(P_n)$, δηλαδή το $Q_{n+1}(f)$ βρίσκεται υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $I(P_n)=\int_a^b P_n(x)dx$, με P_n το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_i, $i=0,1,\dots n$.

$$Q_{n+1}(f)=I(P_n)=\int_a^b P_n(x)dx=\int_a^b f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+\dots+f(x_n)L_n(x))dx$$

$$=f(x_0)\cdot\int_a^b L_0(x)dx+f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx+\dots+f(x_n)\int_a^b L_n(x)dx.$$

$$w_i=\int_a^b L_i(x)dx=\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx$$

Θέτουμε $x=a+sh$, $s\in[0,n]$.

$$w_i=\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx=\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a+sh-(a+jh)}{a+ih-(a+jh)}d(a+sh)=h\cdot\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{s-j}{i-j}ds.$$

Οι συντελεστές w_i στους τύπους Newton-Cotes είναι συμμετρικά τοποθετημένοι, δηλ. $w_{n-i}=w_i$. Θεωρούμε τη μεταβλητή $t=n-s$

$$w_{n-i}=h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n}\frac{s-j}{n-i-j}ds=h\cdot\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{n-t-j}{n-i-j}d(n-t)=$$

$$=-h\int_n^0 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n}\frac{t-(n-j)}{i+(n-j)}dt=h\cdot\int_0^n \prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{n}\frac{t-l}{i-l}dt=w_i$$

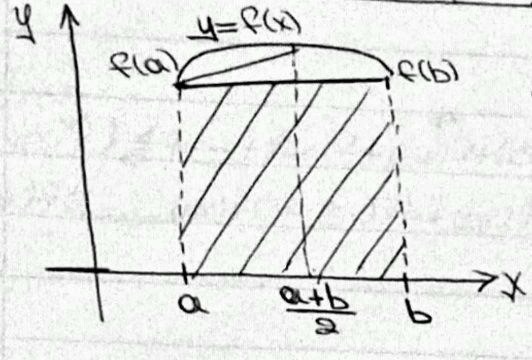
$\boxed{n=1}$: $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$

$w_0 = h\int_0^1 \frac{s-1}{0-1} ds = h\int_0^1 (1-s) ds = h\left[s - \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = h\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{h}{2}$

$w_1 = w_0 = \frac{h}{2}$

$Q_2(f) = \frac{h}{2}\cdot(f(x_0)+f(x_1)) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.

Τύπος ή κανόνας του τραπεζίου.



$E_{τρ} = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με $h=\frac{b-a}{n}$ και $x_i = a+ih$, $i=0,1,2,\ldots n$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και αθροίζουμε για να πάρουμε τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου Q^T_{n+1}.

$$Q^T_{n+1} = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2)) + \ldots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n)) =$$
$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right).$$

$\boxed{n=2}$: $Q_3(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$

$\boxed{h=\frac{b-a}{2}}$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = a+2h = b$.

- $w_0 = h\cdot\int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(0-1)(0-2)} ds = \frac{h}{2}\int_0^2 (s^2+3s+2) ds = \frac{h}{2}\left[\frac{s^3}{3} - 3\cdot\frac{s^2}{2} + 2s\right]_0^2 = \frac{h}{2}\left(\frac{8}{3}-6+4\right) = \frac{h}{3}$

- $w_1 = h\int_0^2 \frac{s(s-2)}{1\cdot(1-2)} ds = -h\cdot\int_0^2 (s^2-2s) ds = -h\left[\frac{s^3}{3} - 2\cdot\frac{s^2}{2}\right]_0^2 = -h\left[\frac{8}{3}-4\right] = \frac{4}{3}h$,

$w_2 = w_0 = \frac{h}{3}$.

$Q_3(f) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

Τύπος ή κανόνας του Simpson. Θα είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα $P\in \mathbb{P}_2$. Αποδεικνύεται ότι ο τύπος του Simpson είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα $P\in \mathbb{P}_3$.

Σύνθετος τύπος του Simpson.

Θεωρούμε n άρτιο, και τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$.

$x_i = a+ih$, $i=0,1,\dots n$, $h=\frac{b-a}{2}$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, ... $[x_{n-2},x_n]$ και αθροίζουμε για να πάρουμε το σύνθετο τύπο του Simpson Q^s_{n+1}.

- $Q^s_{n+1}(f) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) + \frac{h}{3}(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) + \dots + \frac{h}{3}(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1})+f(x_n)) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4 f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4) \dots 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1})+f(x_n))$.

$\boxed{n=3}$ $Q_4(f)=w_0f(x_0)+w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+w_3f(x_3)$.

$h=\frac{b-a}{3}$ $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, $x_3=b$.

$w_0=h\int_0^3 \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}ds = \frac{h}{6}\int_0^3 (s^3-6s^2+11s-6)ds = -\frac{h}{6}\left[\frac{s^4}{4} - 6\cdot\frac{s^3}{3} + 11\cdot\frac{s^2}{2} - 6s\right]_0^3 = -\frac{h}{6}\left[\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18\right] = \frac{3h}{8}$.

$w_1=h\int_0^3 \frac{s(s-2)(s-3)}{1(1-2)(1-3)}ds = \frac{h}{2}\int_0^3 (s^3-5s^2+6s)ds = \frac{h}{2}\left[\frac{s^4}{4} - 5\frac{s^3}{3} + 6\frac{s^2}{2}\right]_0^2 = \frac{h}{2}\left[\frac{81}{4} - 45 + 27\right] = \frac{9h}{8}$, $w_2=w_1=\frac{9h}{8}$, $w_3=w_0=\frac{3h}{8}$.

$Q_4(f)=\frac{3h}{8}(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3))$

Τύπος ή κανόνας των 3/8. Θα είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα $p\in P_3$.

Σύνθετος τύπος των 3/8.

Θεωρούμε n πολλαπλάσιο του 3 και ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$.

$x_i=a+ih$, $i=0,1,\dots n$, $h=\frac{b-a}{n}$

Εφαρμόζουμε τον τύπο των 3/8 στα υποδιαστήματα $[x_0,x_3]$, $[x_3,x_6]$, ... $[x_{n-3},x_n]$. Και αθροίζουμε για να πάρουμε το σύνθετο τύπο των 3/8. $Q^{3/8}_{n+1}$:

$Q^{3/8}_{n+1}(f) = \frac{3h}{8}(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)) + \frac{3h}{8}(f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)) + \dots + \frac{3h}{8}(f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)) =$

$$= \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$